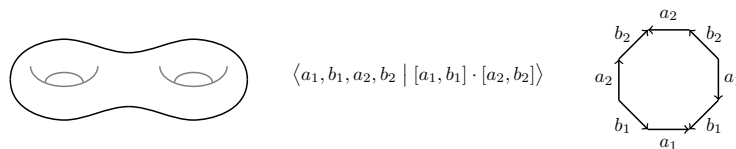


Seminar zur Algebraischen Topologie I: Gruppentheorie von Flächen

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de)

Januar 2013

Das zentrale Thema der geometrischen Gruppentheorie ist es, den Zusammenhang zwischen geometrischen und gruppentheoretischen Eigenschaften von Gruppen zu untersuchen. Dabei werden häufig Mittel aus der algebraischen Topologie eingesetzt. In der Welt der Flächen sind solche Zusammenhänge besonders stark ausgeprägt und gut verstanden.



In diesem Seminar werden wir uns mit topologischen, geometrischen und gruppentheoretischen Aspekten von Flächen beschäftigen. Insbesondere werden wir exemplarisch anhand von Flächen, ihrer Fundamentalgruppen und ihrer Abbildungsklassengruppen einige grundlegende Techniken der geometrischen Gruppentheorie kennenlernen.

Themen

Falls Sie daran interessiert sind, im Zusammenhang mit diesem Seminar eine Abschlussarbeit zu schreiben, geben Sie bitte möglichst bald Bescheid.

Grundlagen der hyperbolischen Geometrie

Vortrag 1 (Die hyperbolische Ebene – Überblick). (Elementare) Definition der hyperbolischen Ebene (insbesondere das Poincarésche Scheibenmodell); Geodäten in der hyperbolischen Ebene; Winkel in der hyperbolischen Ebene; Klassifikation der Isometrien der hyperbolischen Ebene (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch); Achsen hyperbolischer Isometrien.

Literatur: [4, Kapitel 1.1.2], [1, Kapitel A], [11], ...

Vortrag 2 (Quasi-Geometrie). Definition von Quasi-Isometrie; Beispiele; Wortmetriken auf endlich erzeugten Gruppen und Beispiele dafür; Quasi-Isometrie-Typ von endlich erzeugten Gruppen; das Švarc-Milnor-Lemma (für geodätische Räume); Beispiele.

Literatur: [4, Kapitel 8.2.1–8.2.3], [6, Kapitel 5], [5, Kapitel IV], [3, S. 138–142]

Vortrag 3 (Gromov-hyperbolische Räume). Definition Gromov-hyperbolischer Räume; Beispiele; Gromov-Rand; Beweisskizze der Quasi-Isometrie-Invarianz des Gromov-Randes.

Literatur: [6, Kapitel 7.2, 7.3, 8.3], [3, Kapitel H.1, H.3]

Topologie und Geometrie von Flächen

Vortrag 4 (Klassifikation der kompakten Flächen I). Definition von Flächen (mit/ohne Rand); Orientierbarkeit von Flächen; Radó's Triangulierbarkeitssatz (ohne Beweis); Normalformen (von Wörtern) für Flächen (mit Beweis).

Literatur: [7, Kapitel 1], [13, Kapitel II.1–II.4]

Vortrag 5 (Klassifikation der kompakten Flächen II). Bestimmung der Fundamentalgruppe von kompakten Flächen; Abschluss der Klassifikation von kompakten Flächen.

Literatur: [7, Kapitel 4.5], [9, § 74, § 75], [13, Satz II.8.1, II.8.2]

Vortrag 6 (Geometrie von Flächen). Hyperbolische Flächen; orientierte geschlossene zusammenhängende Flächen vom Geschlecht mindestens 2 besitzen eine hyperbolische Struktur; Konsequenz: die Fundamentalgruppen all dieser Flächen haben denselben Quasi-Isometrie-Typ.

Literatur: [1, Kapitel B.1, B.3], [5, Korollar IV.24.(iii)]

Kurven in Flächen

Vortrag 7 (Der Jordansche Kurvensatz). Beweis des Jordanschen Separationssatzes und des Jordanschen Kurvensatzes mithilfe von Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie.

Literatur: [9, § 61, § 63]

Vortrag 8 (Planare Graphen). Lineare Graphen; planare Graphen; die Graphen $K_{3,3}$ und K_5 sind nicht planar (mit Beweis); Satz von Kuratowski (ohne Beweis).

Literatur: [9, § 64], als Hintergrund: [8, Kapitel 2.1–2.3]

Vortrag 9 (Kurven in Flächen). Einfache geschlossene Kurven in Flächen; Isotopie von Kurven; geodätische Repräsentanten; algebraische/geometrische Schnittzahlen für Kurven; das Bigon-Kriterium.

Literatur: [4, Kapitel 1.2]

Abbildungsklassengruppen

Vortrag 10 (Die Abbildungsklassengruppe). Die kompakt-offene Topologie; Definition der Abbildungsklassengruppe; der Alexander-Trick; Abbildungsklassengruppe des Torus; evtl. weitere Beispiele.

Literatur: [4, Kapitel 2.1, 2.2.1, 2.2.4, (2.2.2, 2.2.3)]

Vortrag 11 (Das Koordinatenwechselprinzip und die Alexander-Methode). Das Koordinatenwechselprinzip für Flächen und Beispiele dafür; die Alexander-Methode.

Literatur: [4, Kapitel 1.3, Kapitel 2.3]

Vortrag 12 (Dehn-Twists). Definition von Dehn-Twists; Dehn-Twists sind nicht-trivial; weitere grundlegende Eigenschaften von Dehn-Twists; Trivialität des Zentrums (vieler) Abbildungsklassengruppen.

Literatur: [4, Kapitel 3.1–3.4]

Vortrag 13 (Der Satz von Dehn-Nielsen-Baer). Der Satz von Dehn-Nielsen-Baer, inklusive Beweis.

Literatur: [4, Kapitel 8.1, 8.2]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

<http://books.google.com>
<http://www.ams.org/mathscinet>
<http://www.springerlink.com>

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probenvortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem \LaTeX besser kennenzulernen [10]; dafür werden auch \LaTeX -Vorlagen zur Verfügung gestellt:
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/topsem_ss13/
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung eigenständig zu formulieren und alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Sprechen Sie laut und deutlich.
- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

- [1] R. Benedetti, C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitext, Springer, 1992.
- [2] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.
Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.
- [3] M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Band 319 der *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer, 1999.
- [4] B. Farb, D. Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*, Band 49 der *Princeton Mathematical Series*, Princeton University Press, 2012.
- [5] P. de la Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago University Press, 2000.
- [6] C. Löh. *Geometric group theory, an introduction*, Skript zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“ im WS 2010/11, Universität Regensburg, http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf
- [7] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*, Band 56 der *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1989.
- [8] B. Mohar, C. Thomassen. *Graphs on Surfaces*, The Johns Hopkins University Press, 2001.
- [9] J.R. Munkres. *Topology*, zweite Auflage, Pearson, 1999.
- [10] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The L^AT_EX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.
Eines der Standardwerke zur Benutzung von L^AT_EX; weitere Unterstützung finden Sie unter <http://www.ctan.org/starter.html>
- [11] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Band 149 der *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1994.
- [12] T. Tantau. *The TikZ and PGF Packages*, <http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf>
Dokumentation des TikZ-Pakets für L^AT_EX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in L^AT_EX zu erstellen.
- [13] T. tom Dieck. *Topologie*, zweite Auflage, de Gruyter, 2000.