

Seminar: Das Wortproblem

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de)

Juli 2014

Ein grundlegendes mathematisches Problem ist, welche Fragen algorithmisch beantwortet werden können bzw. welche Objekte überhaupt algorithmisch klassifiziert werden können.

Ausgehend von Turings Entdeckung, dass das sogenannte Halteproblem nicht algorithmisch gelöst werden kann, kann man zeigen, dass selbst die einfachsten gruppentheoretischen Probleme nicht algorithmisch gelöst werden können. Ein solches Problem ist das Wortproblem: Gegeben sei eine Beschreibung einer Gruppe durch (endlich viele) Erzeuger und Relationen. Gibt es einen Algorithmus, der für Wörter in den Erzeugern entscheidet, ob das entsprechende Gruppenelement trivial ist oder nicht?

Diese algorithmische Unzugänglichkeit der Gruppentheorie hat weitreichende Konsequenzen für viele mathematische Teilgebiete. Zum Beispiel folgt daraus, dass das Homöomorphieproblem für Mannigfaltigkeiten nicht algorithmisch lösbar ist. Insbesondere können Mannigfaltigkeiten nicht algorithmisch klassifiziert werden.

In diesem Seminar werden wir die Grundlagen der (Un)Entscheidbarkeit kennenlernen und auf gruppentheoretische Probleme anwenden. Insbesondere werden wir sehen, dass es Gruppen mit algorithmisch unentscheidbarem Wortproblem gibt und die Konsequenzen für topologische Klassifikationsprobleme betrachten.

Falls Sie daran interessiert sind, im Zusammenhang mit diesem Seminar eine Abschlussarbeit zu schreiben, geben Sie bitte möglichst bald Bescheid.

Themen

Grundlagen aus der Berechenbarkeitstheorie

Vortrag 1 (Turingmaschinen und das Halteproblem). Definition von Turingmaschinen, Beispiele, Definition rekursiv aufzählbarer bzw. rekursiver Mengen, das Halteproblem, Gödel-Nummern, universelle Turingmaschinen, das Halteproblem ist nicht algorithmisch lösbar, die „Diagonalsprache“ ist nicht rekursiv.

Literatur: [9, S. 420–425], [3, Kapitel 6] (fast) alle Bücher über Berechenbarkeit

Vortrag 2 (Reguläre Sprachen). Definition regulärer Sprachen über endliche Automaten, das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen (mit Beweis), Beispiele für (nicht-)reguläre Sprachen, grundlegende Eigenschaften regulärer Sprachen, was haben reguläre Sprachen mit regulären Ausdrücken zu tun?

Literatur: [7, S. 130–141], [3, Kapitel 9], (fast) alle Bücher über formale Sprachen

Grundlagen aus der Gruppentheorie

Vortrag 3 (Präsentationen von Gruppen). kurze Einführung in freie Gruppen, Präsentationen von Gruppen durch Erzeuger und Relationen, Definition von endlich erzeugten und endlich präsentierten Gruppen, freie Produkte, freie amalgamierte Produkte (jeweils konkrete Konstruktion und universelle Eigenschaft, sowie Beispiele).

Literatur: [4, Kapitel 2.2, Kapitel 2.3.2]

Vortrag 4 (HNN-Erweiterungen). Definition von HNN-Erweiterungen und Beispiele, jede abzählbare Gruppe kann in eine Gruppe mit zwei Erzeugern eingebettet werden (mit Beweis), es gibt überabzählbar viele Isomorphietypen endlich erzeugter Gruppen.

Literatur: [9, S. 404–417 (ohne die geometrischen Teile)]

Das Wortproblem

Vortrag 5 (Das Wortproblem für Gruppen). Formulierung des Wortproblems für endlich präsentierte Gruppen, Gruppen mit regulärem Wortproblem sind endlich, Definition des Begriffs der (regulären) Normalform, unendliche Gruppen mit regulärer Normalform enthalten ein Element unendlicher Ordnung, der Satz von Howson.

Literatur: [7, S. 109, S. 141–148], [9, S. 425]

Vortrag 6 (Konstruierbarkeit von Cayley-Graphen). Definition von Cayley-Graphen, Zusammenhang zwischen Wortproblem und Konstruierbarkeit von Cayley-Graphen, Definition der Baumslag-Solitar-Gruppen und ihre grundlegenden Eigenschaften, Lösbarkeit des Wortproblems für $B(1, 2)$, Konstruktion des Cayley-Graphen der Baumslag-Solitar-Gruppe $B(1, 2)$.

Literatur: [7, Kapitel 4 und 5]

Vortrag 7 (Dehns Algorithmus). Definition von Dehn-Präsentationen, Dehns Algorithmus, kurzer Überblick über die wichtigsten Begriffe/Eigenschaften von hyperbolischen Gruppen, hyperbolische Gruppen besitzen Dehn-Präsentationen (mit Beweisskizze).

Literatur: [4, Kapitel 7.2–7.4], [2]

Endlich präsentierte Gruppen mit unlösbarem Wortproblem

Vortrag 8 ((Halb-)Gruppen mit unlösbarem Wortproblem). Satz von Markov-Post über Halbgruppen (mit Beweis), der Satz von Novikov-Boone-Britton (mit Beweis, aber ohne Beweis des Lemmas von Boone).

Literatur: [9, S. 425–433]

Vortrag 9 (Das Lemma von Boone). Beweis(skizze) des Lemmas von Boone, inklusive geometrischer Motivation der algebraischen Beweise.

Literatur: [9, Lemma 12.7, S. 433–450]

Vortrag 10 (Der Einbettungssatz von Higman). Formulierung und Beweis(skizze) des Einbettungssatzes von Higman.

Literatur: [9, S. 450–464]

Vortrag 11 (Markov-Eigenschaften von Gruppen). Existenz universeller endlich präsentierte Gruppen (mit Beweis), Definition von Markov-Eigenschaften von Gruppen, Beispiele für Markov-Eigenschaften von Gruppen, Markov-Eigenschaften sind nicht algorithmisch testbar (mit Beweis).

Literatur: [9, S. 464–470]

Unlösbarkeit der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten

Vortrag 12 (die Fundamentalgruppe). Definition der Fundamentalgruppe, Homotopieinvarianz, der Satz von Seifert und van Kampen, wie erhält man aus (simplicialen) Komplexen eine Präsentation der Fundamentalgruppe?

Literatur: (fast) alle Bücher über algebraische Topologie, z.B. [6]

Vortrag 13 (Markovs Konstruktion). Markovs Konstruktion, Beweis der algorithmischen Unlösbarkeit des Homöomorphieproblems in Dimension mindestens 4.

Literatur: [5]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

<http://books.google.com>
<http://www.ams.org/mathscinet>
<http://www.springerlink.com>

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probenvortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem \LaTeX besser kennenzulernen [8]; dafür werden auch \LaTeX -Vorlagen zur Verfügung gestellt:
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/topsem_ss14/
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung eigenständig zu formulieren und alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Sprechen Sie laut und deutlich.
- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

- [1] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.
Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.
- [2] M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Band 319 der *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer, 1999.
- [3] M.D. Davis, R. Sigal, E.J. Weyuker. *Computability, Complexity, and Languages: Fundamentals of Theoretical Computer Science*, Academic Press, 1994.
- [4] C. Löh. *Geometric Group Theory, an Introduction*, Skript zur Vorlesung Geometrische Gruppentheorie, Universität Regensburg, WS 2010/11
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf
- [5] A.A. Markov. Insolubility of the problem of homeomorphy. (Russian) *Proc. Internat. Congress Math. 1958*, S. 300–306, Cambridge University Press, 1960.
(Inoffizielle) englische Übersetzung (einer nicht auffindbaren deutschen Übersetzung . . . :
<http://www.cs.dartmouth.edu/~afra/goodies/markov.pdf>
- [6] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*, Band 56 der *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1989.
- [7] J. Meier. *Groups, Graphs and Trees*, Band 73 der *Student Texts of the London Mathematical Society*, Cambridge University Press, 2008.
- [8] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The L^AT_EX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.
Eines der Standardwerke zur Benutzung von L^AT_EX; weitere Unterstützung finden Sie unter <http://www.ctan.org/starter.html>
- [9] J.J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*, vierte Auflage, Band 148 der *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1999.
- [10] T. Tantau. *The TikZ and PGF Packages*,
<http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf>
Dokumentation des TikZ-Pakets für L^AT_EX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in L^AT_EX zu erstellen.